

局所ノイズ化におけるトーリック符号の忠実度と相転移

立澤 響

中央大学理工学部物理学科

Fidelity and Phase Transition of the Toric Code under Local Noise

概要

In this study, to investigate the effects of noise on the toric code, we calculated the fidelity when each qubit independently underwent depolarizing noise. The calculation employed a method that maps the fidelity to the partition function of a classical spin system [1]. As a result, the fidelity of the toric code exhibited a transition-like behavior from a regime dominated by the error-free state to a maximally mixed state as the error probability increased.

導入

- 量子コンピューターをノイズによるエラーから守るために、量子エラー訂正符号は必須である
- 中でもトーリック符号は4重に縮退した基底状態を2 qubit に変換して用いるが、その基底状態は系のもつトポロジカル秩序によって強いエラー耐性を示す [2]
- 先行研究では、トーリック符号のエラー耐性とトポロジカル秩序の関係が調べられている [3]
- 本研究では、ノイズの影響による状態変化を見るために忠実度を計算した。

モデル

トーリック符号

- 正方格子の辺に qubit を配置した系
- Stabilizer 符号の一種

Stabilizer generators:

$$\hat{A}_s = \prod_{j \in \text{star}(s)} \hat{X}_j, \quad \hat{B}_p = \prod_{j \in \text{boundary}(p)} \hat{Z}_j$$

Stabilizers: generator の任意の積

- N qubit 系の状態は、 N 個の generator の固有値を指定すれば、それらの固有状態として定まる
- 一方、境界条件により、generator の自由度が2つ減少 $\prod_s \hat{A}_s = \prod_p \hat{B}_p = \hat{I}$
- 結果、任意の \hat{A}_s, \hat{B}_p の固有値が +1 である状態を $|\psi\rangle$ とすると、 $|\psi\rangle$ は $2^2 = 4$ 重縮退し、2 qubit として利用可能
- Logical operator \hat{Z}_1, \hat{Z}_2 の固有値がともに +1 の状態を $|\psi_{++}\rangle$ とすると、 $|\psi_{++}\rangle$ は一意に定まっている

Logical operators: $\hat{Z}_1 = \prod_{j \in \gamma_1} Z_j, \hat{Z}_2 = \prod_{j \in \gamma_2} Z_j$

脱分極ノイズ: Pauli X, Y, Z エラーが等確率で起こる一般的なノイズモデル以下を各 qubit i に独立に作用させる

$$\varepsilon_i(\cdot) = (1-p)(\cdot) + \frac{p}{3}(X_i(\cdot)X_i + Y_i(\cdot)Y_i + Z_i(\cdot)Z_i)$$

忠実度の計算

エラーのない状態: $\rho_0 = |\psi_{++}\rangle\langle\psi_{++}|$, エラー後の状態: $\rho = \prod_i \varepsilon_i(\rho_0)$

忠実度:

$$F = \langle\psi_{++}|\rho|\psi_{++}\rangle = \sum_{m=0}^N (1-p)^{N-m} \left(\frac{p}{3}\right)^m \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq N \\ \mu_1, \dots, \mu_m}} \langle\psi_{++}|\prod_{k=1}^m \sigma_{\mu_k}^{i_k}|\psi_{++}\rangle^2$$

= m 個の Pauli 演算子からなる Stabilizer の個数

$$\sigma_{1i} = X_i, \sigma_{2i} = Y_i, \sigma_{3i} = Z_i \quad \because \langle\psi_{++}|\prod \sigma|\psi_{++}\rangle^2 = \begin{cases} 1 & \text{if } \prod \sigma = \pm \hat{I} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

マップ手法

相転移的振る舞いをより明確に見るため、古典スピン系にマップする [1]

古典スピン系の分配関数と忠実度の対応

$$F = \sum_{m=0}^N (1-p)^{N-m} \left(\frac{p}{3}\right)^m \times (m \text{ 個の Pauli 演算子からなる Stabilizer の個数})$$

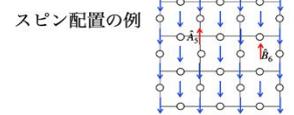
$$Z = \sum_{m=0}^N e^{-\beta(m+c)} \times (\text{エネルギー固有値 } m \text{ をもつスピン配置の個数})$$

Step 1: 古典スピンの導入

Stabilizer に generator \hat{A}_s, \hat{B}_p が含まれている (いない) 場合を、対応する位置の古典スピン τ^s, τ^p が +1 (-1) であることに対応させる

$$\hat{S} = \hat{A}_1^{l_1} \dots \hat{A}_{N/2}^{l_{N/2}} \hat{B}_1^{l_{N/2+1}} \dots \hat{B}_{N/2}^{l_N}$$

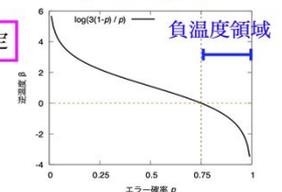
$$l_i \in \{0, 1\}$$



Step 2: パラメーター p, β, c 間の関係式の決定

上式の各係数の比較により、

$$\rightarrow \beta = \log \frac{3(1-p)}{p}, \quad c = -\frac{n}{\beta} \log(1-p).$$



Step 3: 古典スピン系のハミルトニアン (= Pauli 演算子の個数 m) の導出

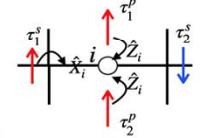
qubit i に Pauli \hat{X}_i 演算子がかかる場合:

頂点スピン τ_1^s, τ_2^s が逆向きかつ面スピン τ_1^p, τ_2^p が同じ向きの配置

$$H_X = \sum_{(i,j),(k,l)} \frac{1}{2} (1 - \tau_i^s \tau_j^s) \frac{1}{2} (1 + \tau_k^p \tau_l^p)$$

Pauli \hat{Y}, \hat{Z} 演算子も同様に考えて合計すると、

$$H = -\frac{1}{4} \sum_{(i,j)} (\tau_i^s \tau_j^s + \tau_i^p \tau_j^p) - \frac{1}{4} \sum_{(i,j),(k,l)} \tau_i^s \tau_j^s \tau_k^p \tau_l^p + \frac{3}{4} N.$$



← Eight-vertex モデル [4]に相当

計算結果

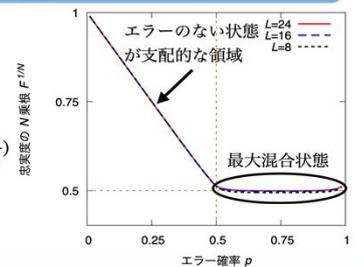
古典スピン系の分配関数=忠実度

内部エネルギーの積分から計算

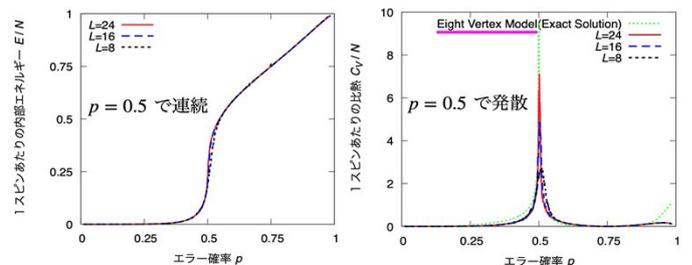
$$Z(p)^{1/N} = (1-p) \exp\left(-\int_0^p \frac{\langle E \rangle_p}{p(1-p)} dp\right)$$

Monte Carlo 法により計算

$p = 0.5$ で急激な変化あり



古典スピン系の内部エネルギーと比熱



→ 二次的相転移の特徴を示す。また、比熱が Eight vertex モデルによく一致

- マップ後の古典スピン系は、 $p = 0.5$ で二次的相転移を起こす。また、それを厳密解をもつモデルに対応づけることができた
- 忠実度の計算は、トーリック符号において、エラーのない状態が支配的な領域から最大混合状態への相転移的变化が起こっていることを示唆

[1] T. Numajiri et al., arXiv:2510.00548 (2025).
 [2] A. Kitaev, Annals of Physics **303**(1) (2003).
 [3] R. Fan et al., PRX Quantum **5**, 020343 (2024).
 [4] R. J. Baxter, Exactly Solved Models in Statistical Mechanics (1982).